Θέμα Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)$$
$$=\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right),$$

και για $h\neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$. Άρα

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1\in A$, όταν $f(x)\leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Α3. Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατωτέρου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Α4. α) Σ **β) Λ** **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. α. $\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i x_i}{\nu}=\frac{1\cdot 2+3\cdot 3+5\cdot 4+9\cdot 1}{10}=\frac{40}{10}=4$

β. Οι τιμές τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι: 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9

$\delta=\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{3+5}{2}=4$

γ. $s^2=\frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=\frac{(2-4)^2\cdot 1+(3-4)^2\cdot 3+(5-4)^2\cdot 4+(9-4)^2\cdot 1}{10}=\frac{50}{10}=5$

Β2. $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

Το δείγμα είναι ομοιογενές όταν

$CV\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}}{4}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow 10\sqrt{5}\leq 4\Leftrightarrow\left(10\sqrt{5}\right)^2\leq 4^2\Leftrightarrow 100\cdot 5\leq 16$ αδύνατο.

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Για κάθε $x<\frac{1}{2}$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και για κάθε $x>\frac{1}{2}$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Η f έχει ελάχιστο στο $x=\frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$.

Γ2. Είναι $f(2)=3$ και $f'(2)=3$.

Η ε έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-3=3(x-2)\Leftrightarrow y=3x-3$

Γ3. Για $x=0$ είναι $y=-3$, οπότε η ε τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,-3)$.

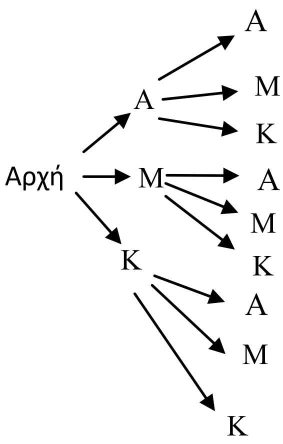
Για $y=0$ είναι $x=1$, οπότε η (ε) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(1,0)$.

Γ4. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω Α το ενδεχόμενο η μπάλα που παίρνουμε από το κουτί να είναι άσπρη, Μ να είναι μαύρη και Κ να είναι κόκκινη.



Ω={ΑΑ, ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΜ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ,ΚΚ}

Δ2. Α={ΑΜ, ΚΜ, ΜΜ}, Β={ΑΜ, ΑΚ, ΚΜ, ΚΑ, ΜΑ, ΜΚ}

Δ3. α. Α΄={ΑΑ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΚ}, Ν(Α΄)=6, Ν(Ω)=9, οπότε $P(A')=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Είναι Α∩ Β={ΑΜ, ΚΜ}, Ν(Α∩ Β)= 2 και $P(A\cap B)=\frac{2}{9}$

Α-Β={ΜΜ}, Ν(Α-Β) = 1 και $P(A-B)=\frac{1}{9}$

Β-Α ={ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ}, Ν(Β-Α)=4 και $P(B-A)=\frac{4}{9}$

β. Είναι ΑUΒ={ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ} και (ΑUΒ)΄={ΑΑ, ΚΚ}.

1^{ος} τρόπος

$\Gamma \subseteq \{AA, KK\}$, άρα $P(\Gamma) \leq P\left[(A \cup B)'\right] = \frac{2}{9}$ με την ισότητα να ισχύει όταν

$\Gamma = \{AA, KK\}$

2^{ος} τρόπος

Είναι $\Gamma \cap (A \cup B) = \varnothing$ άρα $P(\Gamma \cup (A \cup B)) = P(\Gamma) + P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$P(\Gamma) + \frac{7}{9} \leq 1 \Leftrightarrow P(\Gamma) \leq \frac{2}{9}$, άρα $P(\Gamma)_{max} = \frac{2}{9}$, όταν $\Gamma = \{AA, KK\}$